УДК 517.97

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Ф.КУЛИЕВ, С.М.ЗЕЙНАЛЛЫ
Бакинский Государственный Университет,
Гянджинский Государственный Университет
hkuliyev@rambler.ru

В работе рассматривается некорректная задача Коши-Неймана для линейного эллиптического уравнения второго порядка, которая сводится к задаче оптимального управления. Полученная задача регуляризуется и изучается с помощью методов оптимального управления и, применяя метод Фурье, получается точное решение задачи оптимального управления и решение исходной задачи Коши-Неймана.

Ключевые слова: некорректная задача Коши-Неймана, оптимальное управление, условие оптимальности, метод Фурье.

Некорректно поставленные задачи относятся как к классическим разделам математики, так и к различным классам практически важных прикладных задач. К числу важных задач относятся, например, решение задачи Коши для уравнения Лапласа, интегральных уравнений первого рода, некоторых задач линейной алгебры, оптимального управления, обратных задач и др. Подобные задачи часто встречаются при описании различных физических явлений. Поэтому не вызывают сомнения необходимости разработки методов решения таких задач.

1. Постановка задачи

Рассмотрим граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - Au = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \text{ на } S_T, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

где $Q_T=\Omega\times(0,T)$ - цилиндр в R^{n+1}, Ω - ограниченная область в R^n с гладкой границей Γ, $S_T=\Gamma\times(0,T)$ - боковая поверхность цилиндра Q_T, $f\in L_2(Q_T)$, $u_0\in W_2^1(\Omega)$, $u_1\in L_2(\Omega)$ - заданные функции,

$$Au=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

причем $a_{ij}\in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall\xi\in R^n$ и для всех $x\in\overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\ \alpha=const>0,\ a_{ij}(x)=a_{ji}(x),\ i,j=1,\dots,n,$$

$\dfrac{\partial u}{\partial\nu_A}\equiv\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu,x_i)$ - конормальная производная, а ν - внешняя нормаль к границе Γ области Ω.

Предполагается, что $\dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t}\in U_{ad}$, где U_{ad} - выпуклое замкнутое множество из $L_2(\Omega)$, которое содержит в себе нуль пространства $L_2(\Omega)$.

Известно, что задача является некорректно поставленной [1], [2].

Задаче (1)-(3) поставим в соответствие следующую задачу оптимального управления: найти минимум функционала

$$\mathrm{I}(\mathrm{V})=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[u(x,0)-u_0(x)]^2dx \tag{4}$$

в U_{ad} при ограничениях

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-Au=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu_A}=0\ \text{на}\ S_T, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=u_1(x),\ \frac{\partial u(x,T)}{\partial t}=\mathrm{V}(x),\ x\in\Omega. \tag{5}$$

Эту задачу назовем задачей (4),(1),(2),(5).

Как известно, в теории оптимального управления задача (4), (1), (2), (5) также является некорректной [3].

Отметим, что при $f\in L_2(Q_T)$, $u_1\in L_2(\Omega)$, $\mathrm{V}\in L_2(\Omega)$ граничная задача (1), (2), (5) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ [4].

2. Регуляризация задачи оптимального управления (4),(1),(2),(5)

Известно, что одним из эффективных аппаратов решения некорректных задач является метод регуляризации [5], [6].

В рассматриваемой задаче функционал $\dfrac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}|\mathrm{V}(x)|^2\,dx \quad (\varepsilon > 0)$ может служить стабилизатором.

Поэтому рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\mathrm{I}_{\varepsilon}(\mathrm{V}) = \mathrm{I}(\mathrm{V}) + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega}|\mathrm{V}(x)|^2\,dx \tag{6}$$

в классе U_{ad} при ограничениях (1),(2),(5). Эту задачу назовем задачей (6),(1),(2),(5).

Пусть $u(x,t;\mathrm{V})$ - решение задачи (1),(2),(5), соответствующее заданному управлению $\mathrm{V}\in U_{ad}$, $u(x,t;0)$ - решение задачи (1),(2),(5) при $\mathrm{V}(x)\equiv 0$. Примем следующие обозначения:

$$a(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2) = \int\limits_{\Omega}[u(x,0;\mathrm{V}_1)-u(x,0;0)][u(x,0;\mathrm{V}_2)-u(x,0;0)]dx +$$

$$+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\mathrm{V}_1(x)\mathrm{V}_2(x)dx,$$

$$L(\mathrm{V}) = \int\limits_{\Omega}[u_0(x)-u(x,0;0)][u(x,0;\mathrm{V})-u(x,0;0)]dx,$$

где $a(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2)$ - билинейная непрерывная симметричная форма на U_{ad}, а $L(\mathrm{V})$ - линейный функционал на U_{ad}. Тогда функционал (6) можно переписать в следующем виде:

$$J_{\varepsilon}(\mathrm{V}) = \frac{1}{2}\left\{a(\mathrm{V},\mathrm{V}) - 2L(\mathrm{V}) + \int\limits_{\Omega}[u(x,0;0)-u_0(x)]^2\,dx\right\}.$$

Поскольку $a(\mathrm{V}_1;\mathrm{V}_2)$ - билинейная непрерывная симметричная форма на U_{ad} и удовлетворяет условию

$$a(\mathrm{V},\mathrm{V}) \ge \frac{\varepsilon}{2}\|\mathrm{V}\|^2_{L_2(\Omega)},$$

в силу известной теоремы из [3], справедлива следующая

Теорема 1. В задаче оптимального управления (6),(1),(2),(5) существует такой элемент $\bar{\mathrm{V}}\in U_{ad}$, что

$$\mathrm{I}_{\varepsilon}(\bar{\mathrm{V}}) = \inf_{\mathrm{V}\in U_{ad}}\mathrm{I}_{\varepsilon}(\mathrm{V})$$

и этот элемент будет единственным.

Далее, в силу теоремы из [3], справедлива

Теорема 2. Для того, чтобы $\bar{\mathrm{V}}\in U_{ad}$ было оптимальным управлением, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\mathrm{I}_{\varepsilon\mathrm{V}}(\bar{\mathrm{V}})(\mathrm{V}-\bar{\mathrm{V}}) \ge 0 \qquad \forall\,\mathrm{V}\in U_{ad},$$

т.е. выполняется неравенство

$$\int_{\Omega}[u(x,0;\bar{v})-u_0(x)]u_v(x,0;\bar{v})[v(x)-\bar{v}(x)]dx+$$
$$+\varepsilon\int_{\Omega}\bar{v}(x)[v(x)-\bar{v}(x)]dx\geq 0 \qquad \forall v\in U_{ad}\,, \tag{7}$$

где $I_{\varepsilon v}(\bar{v})$ - производная Гато функционала $I_{\varepsilon}(v)$ по v в точке $\bar{v}$, а $u_v(x,t;v)$ - производная решения задачи (1),(2),(5) по v.

Преобразуем неравенство (7). Для этого линейную задачу (1), (2), (5) запишем в операторном виде

$$Bu=F\equiv\{f,u_1,v\},$$

причём оператор B действует из $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$.

Тогда решение $u(x,t;v)$ этого операторного уравнения можно записать в следующем виде

$$u(x,t;v)=B^{-1}F\,,$$

причём оператор B^{-1} существует [4], [7] и является линейным непрерывным из $L_2(Q_T)\times L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$ в $W_2^1(Q_T)$.

Далее берём производную этого решения в точке $\bar{v}$ по направлению $v-\bar{v}$:

$$u_v(x,t;\bar{v})[v-\bar{v}]=u(x,t;v)-u(x,t;\bar{v})\,.$$

Тогда неравенство (7) принимает вид:

$$\int_{\Omega}[u(x,0;\bar{v})-u_0(x)]\,[u(x,0;v)-u(x,0;\bar{v})]dx+$$
$$+\varepsilon\int_{\Omega}\bar{v}(x)[v(x)-\bar{v}(x)]dx\geq 0 \qquad \forall v\in U_{ad}\,. \tag{8}$$

3. Условие оптимальности.

Введём сопряжённую граничную задачу:

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2}-A\psi(x,t)=0,\quad (x,t)\in Q_T\,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu_A}=0 \quad \text{на } S_T\,, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=u(x,0;\bar{v})-u_0(x)\,,\ \left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T}=0,\ \ x\in\Omega\,. \tag{11}$$

Отметим, что задача (9)-(11) имеет единственное решение из $W_2^1(Q_T)$ [4]. С помощью этой граничной задачи преобразуем первое слагаемое в неравенстве (8).

Если обозначить $\tilde{u}(x,t)=u(x,t;v)-u(x,t;\bar{v})$, то

$$\int\limits_{Q_T}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}-A\tilde{u}\right]\psi(x,t;\bar{V})dxdt=0,$$

где $\psi(x,t;\bar{V})$ - решение задачи (9)-(11).

Отсюда, с помощью интегрирования по частям и пользуясь условиями (2),(5) и (9)-(11), имеем:

$$\int\limits_{Q_T}\left[\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}-A\tilde{u}\right]\psi(x,t;\bar{V})dxdt=\int\limits_{\Omega}[V(x)-\bar{V}(x)]\psi(x,T;\bar{V})dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}[u(x,0;V)-u(x,0;\bar{V})]\frac{\partial\psi(x,0;\bar{V})}{\partial t}dx=0. \qquad (12)$$

Пользуясь первым условием (11), из формулы (12) получим, что

$$\int\limits_{\Omega}[u(x,0;\bar{V})-u_0(x)]\,[u(x,0;V)-u(x,0;\bar{V})]dx=$$

$$=-\int\limits_{\Omega}\psi(x,T;\bar{V})[V(x)-\bar{V}(x)]dx. \qquad (13)$$

Тогда из соотношений (8) и (13) следует, что

$$\int\limits_{\Omega}\left[-\psi(x,T;\bar{V})+\varepsilon\bar{V}(x)\right][V(x)-\bar{V}(x)]dx\geq 0 \quad \forall V\in U_{ad}. \qquad (14)$$

Таким образом, получаем условие оптимальности в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Чтобы элемент $\forall\bar{V}\in U_{ad}$ был оптимальным управлением в задаче (6), (1), (2), (5), необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял граничным задачам (1), (2), (5), (9)-(11) и вариационному неравенству (14).

4. Применение метода Фурье

Для разрешения условий оптимальности (1),(2),(5), (9)-(11) и (14) воспользуемся методом Фурье. Решение граничных задач (1),(2),(5) и (9)-(11) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x),\quad \psi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)X_k(x),$$

где

$$X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{mes\,\Omega}},\ \lambda_0=0,\ X_k(x)\ \text{и}\ \lambda_k>0,\ k=1,2,... \qquad (15)$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи

$$AX(x)=\lambda^2X(x),\ \left.\frac{\partial X}{\partial\nu_A}\right|_{\Gamma}=0.$$

При $V=\bar{V}$ из (1),(2),(5), (9)-(11) и (14) получаем:

$$
\begin{cases} \ddot{u}_k(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = f_k(t), \quad t \in (0,T), \\ \dot{u}_k(0) = u_{1k}\,,\ \dot{u}_k(T) = \bar{V}_k\,,\ k = 0,1,2,\dots\,, \end{cases} \tag{16}
$$

$$
\begin{cases} \ddot{\psi}_k(t) - \lambda_k^2 \psi_k(t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ \dot{\psi}_k(0) = u_k(0) - u_{0k}\,,\ \dot{\psi}_k(T) = 0,\ k = 0,1,2,\dots\,, \end{cases} \tag{17}
$$

$$
[-\psi_k(T) + \varepsilon \bar{V}_k\,]\,[V_k - \bar{V}_k\,] \ge 0 \qquad \forall V_k\,,\ k = 0,1,2,\dots\,, \tag{18}
$$

где $f_k(t), u_{0k}, u_{1k}, V_k, \bar{V}_k,\ k = 0,1,2,\dots$ - коэффициенты Фурье функций $f(x,t)$, $u_0(x), u_1(x),\ V(x),\ \bar{V}(x)$ по системе $\{X_k(x)\}$ собственных функций (15).

Применяя известные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решения граничных задач (16) и (17) при $k = 1,2,\dots$ можно представить в виде

$$
u_k(t) = \frac{\bar{V}_k ch\lambda_k t}{\lambda_k sh\lambda_k T} - \frac{u_{1k} ch\lambda_k (T-t)}{\lambda_k sh\lambda_k T} + \int_0^T G_k(t;\tau) f_k(\tau) d\tau,\ k = 1,2,\dots\,, \tag{19}
$$

$$
\psi_k(t) = -\frac{[u_k(0) - u_{0k}\,]}{\lambda_k sh\lambda_k T} ch\lambda_k (T-t),\ k = 1,2,\dots\,, \tag{20}
$$

где

$$
G_k(t;\tau) = \begin{cases} -\dfrac{ch\lambda_k (T-\tau) ch\lambda_k t}{\lambda_k sh\lambda_k T},\ t \in [0,\tau]\,, \\ \dfrac{sh\lambda_k (t-\tau)}{\lambda_k} - \dfrac{ch\lambda_k (T-\tau) ch\lambda_k t}{\lambda_k sh\lambda_k T}, \quad t \in [\tau, T] \end{cases}
$$

функция Грина задачи (16).

Отметим, что при $k = 0$ решения задач (16) и (17) имеют вид:

$$
u_0(t) = \int_0^t (t-s) f_0(s) ds + u_{10} t + u_{00}\,,
$$

$$
\psi_0(t) = C = const
$$

и

$$
\int_0^T f_0(t) dt + u_{10} = \bar{V}_0\,,
$$

причем

$$
u_{00} = \frac{1}{\sqrt{mes\,\Omega}} \int_\Omega u_0(x) dx,\ \ u_{10} = \frac{1}{\sqrt{mes\,\Omega}} \int_\Omega u_1(x) dx,
$$

$$
\bar{V}_0 = \frac{1}{\sqrt{mes\,\Omega}} \int_\Omega \bar{V}(x) dx,\ \ f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{mes\,\Omega}} \int_\Omega f(x,t) dx\,.
$$

Из формул (19),(20) и (18) находим

$$u_k(0)=\frac{\bar{V}_k}{\lambda_k sh\lambda_k T}-\frac{u_{1k}ch\lambda_k T}{\lambda_k sh\lambda_k T}+\int_0^T G_k(0;\tau)\,f_k(\tau)d\tau\,,\ k=1,2,...\ ,$$

$$\psi_k(T)=-\frac{u_k(0)-u_{0k}}{\lambda_k sh\lambda_k T},\ k=1,2,...\ ,$$

$$[u_k(0)-\varphi_{0k}+\varepsilon\,\lambda_k sh\lambda_k T\cdot\bar{V}_k\,][V_k-\bar{V}_k\,]\geq 0\quad \forall V_k,\ \ k=1,2,...\ . \qquad (21)$$

Условия (21) преобразуем к следующему виду:

$$\left[\bar{V}_k\left(\frac{1}{\lambda_k sh\lambda_k T}+\varepsilon\lambda_k sh\lambda_k T\right)-\frac{u_{1k}ch\lambda_k T}{\lambda_k}-u_{0k}+\right.$$

$$\left.+\int_0^T G_k(0;\tau)\,f_k(\tau)d\tau\right][V_k-\bar{V}_k\,]\geq 0\quad \forall V_k,\ k=1,2,...\ . \qquad (21')$$

Рассмотрим случай $U_{ad}=L_2(\Omega)$. Тогда из условия $(21')$ получим, что

$$\bar{V}_k=\beta_{k\varepsilon}^{-1}\left[u_{0k}+u_{1k}\,\frac{cth\lambda_k T}{\lambda_k}-\int_0^T G_k(0;\tau)\,f_k(\tau)d\tau\right], \qquad (22)$$

где $\beta_{k\varepsilon}=\dfrac{1+\varepsilon\,\lambda_k^2 sh^2\lambda_k T}{\lambda_k sh\lambda_k T}$, $k=1,2,...$, а из (18) при $k=0$ следует, что $\bar{V}_0=\dfrac{\psi_0(T)}{\varepsilon}$. Поскольку нас интересует конечное значение $\bar{V}_0$ при $\varepsilon\to 0$, значение $\psi_0(T)$ должно быть равняться нулю. Тогда $\bar{V}_0=0$ и решение задачи (17) при $k=0$ тождественно равняется нулю. Поскольку решение задачи (16) при $k=0$ имеет вид:

$$u_0(t)=\int_0^t (t-s)\,f_0(s)ds+u_{10}t+u_{00}\,,$$

необходимо выполняется условие

$$\int_0^T f_0(t)dt+u_{10}=0\,.$$

Таким образом, мы находим оптимальные значения коэффициентов Фурье $\bar{V}_k$ функции $\bar{V}(x)$. Далее, при $\varepsilon\to 0$ из формул (19) и (22) имеем

$$u_k^0(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_k(t)=u_{0k}ch\lambda_k t+u_{1k}\,\frac{ch\lambda_k t\,cth\lambda_k T}{\lambda_k}-ch\lambda_k t\int_0^T G_k(0;\tau)\,f_k(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{u_{1k}ch\lambda_k(T-t)}{\lambda_k sh\lambda_k T}+\int_0^T G_k(t;\tau)\,f_k(\tau)d\tau\,, \qquad (23)$$

$$\bar{\mathbf{V}}_k^0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{\mathbf{V}}_k = u_{0k}\lambda_k sh\lambda_k T + u_{1k} ch\lambda_k T - \lambda_k sh\lambda_k T\int_0^T G_k(0;\tau) f_k(\tau) d\tau,\ k = 1,2,... \quad (24)$$

Отметим, что решения $u_k(t)$, найденные по формуле (19) в соответствии с оптимальными коэффициентами Фурье $\bar{\mathbf{V}}_k$, $k = 1,2,...$, найденные по формуле (22), должны удовлетворять предельным соотношениям $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_k(0) = u_{0k}$, которые действительно имеют место. И это согласуется с условием $u(x,0) = u_0(x)$ из (3).

Таким образом, точное решение задачи (4), (1), (2), (5) представляется формулой

$$\bar{\mathbf{V}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k sh\lambda_k T\left[u_{0k} + \frac{u_{1k} cth\lambda_k T}{\lambda_k} - \int_0^T G_k(0;\tau) f_k(\tau) d\tau\right] X_k(x),$$

а решение для исходной задачи (1)-(3) получается в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{mes\Omega}} u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{0k} ch\lambda_k t + \frac{u_{1k}}{\lambda_k sh\lambda_k T}\left(ch\lambda_k t\cdot ch\lambda_k T - ch\lambda_k (T-t)\right) - \right.$$

$$\left. - ch\lambda_k t\cdot\int_0^T G_k(0;\tau) f_k(\tau) d\tau + \int_0^T G_k(t;\tau) f_k(\tau) d\tau\right] X_k(x).$$

Из равенств (23) и (24) следуют:

а) с ростом индекса k коэффициенты Фурье функции $\bar{\mathbf{V}}(x)$ и $u_k(t)$ могут неограниченно возрастать, если этот рост не будет «подавляться» более быстрым уменьшением абсолютных величин коэффициентов u_{0k}, u_{1k} и значений норм $\| f_k(t)\|_{L_2(0,T)}$;

б) граничная задача (1)-(3) при выше поставленных условиях на данные имеет единственное L_2- сильное решение [8], тогда и только тогда, когда

$$\left\{\lambda_k \exp\{\lambda_k T\} u_{0k}\right\}_{k=1}^{\infty},\ \left\{\exp\{\lambda_k T\} u_{1k}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

$$\left\{\lambda_k \exp\{\lambda_k T\}\cdot\| f_k(t)\|_{L_2(0,T)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset l_2. \quad (25)$$

Поэтому становится ясным природа некорректности в задаче Коши-Неймана (1)-(3).

Для того чтобы получить аналог примера Адамара в задаче (1)-(3) берём:

$$n = 2,\ \Omega = (0,\pi)\times(0,\pi),\ T = 1,\ a_{11}(x_1,x_2) = 1,\ a_{12}(x_1,x_2) =$$

$$= a_{21}(x_1,x_2) = 0,\ a_{22}(x_1,x_2) = 1,\ f(x_1,x_2,t) \equiv 0,\ u_0(x_1,x_2) \equiv 0,$$

$$u_1(x_1,x_2) \equiv \exp\{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\}\cos kx_1 \cos k_2 x_2,\quad k = (k_1,k_2),\quad k_1,k_2 \in N.$$

Тогда решение задачи Коши-Неймана для уравнения Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^{\,2}} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^{\,2}} = 0$ будет иметь вид:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \exp\{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\} \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 sh\sqrt{k_1^2 + k_2^2} t, \quad (26)$$

причём оно единственно. Кроме того, при $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \to \infty$ функция $u_1(x_1, x_2)$ равномерно стремится к нулю и притом не только сама, но и все её производные принадлежат $L_2(\Omega)$. Однако решение (26) при любом $t > 0$ имеет вид косинусоиды со сколь угодно большой амплитудой и не принадлежит пространству $L_2(Q_T)$.

Для того чтобы функция $u_1(x_1, x_2)$ удовлетворяла условию (25), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье u_{1k} имели асимптотику для больших $k = (k_1, k_2)$ порядка $\exp\{-(1+\varepsilon)\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\}$, где $\varepsilon > 0$. В рассматриваемом примере имеется асимптотика всего лишь порядка $\exp\left\{-\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right\}$, которая явно недостаточно для корректности задачи Коши-Неймана для уравнения Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Сиб. научное издательство. Новосибирск, 2009.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс., 2002.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
8. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.

İKİTƏRTİBLİ ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN KOŞİ-NEYMAN MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ ÜSULLARININ TƏTBİQİ HAQQINDA

H.F.QULİYEV, S.M.ZEYNALLI

XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli xətti elliptik tənlik üçün korrekt olmayan Koşi-Neyman məsələsinə baxılır və məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir. Alınan məsələ requlyarlaşdırılır, optimal idarəetmə üsullarının köməyilə öyrənilir və Furye üsulunu tətbiq edərək optimal idarəetmə məsələsinin dəqiq həlli və Koşi-Neyman məsələsinin həlli alınır.

Açar sözlər: korrekt olmayan Koşi-Neyman məsələsi, optimal idarəedici, optimallıq şərti, Furye üsulu.

ON AN APPLICATION OF THE OPTIMAL CONTROL METHODS TO THE SOLUTION OF THE CAUCHY-NEUMANN PROBLEM FOR THE SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION

H.F.GULIYEV, S.M.ZEYNALLI

SUMMARY

Ill-posed Cauchy-Neumann problem is considered for the second order linear elliptic equation, which is reduced to the optimal control problem. The obtained problem is regularized and investigated by the optimal control methods. Then, using the Fourier method, the exact solution of the optimal control problem and the solution of the initial problem are found.

Key words: ill-posed Cauchy-Neumann problem, optimal control, optimality condition, Fourier method.

Поступила в редакцию: 01.02.2013 г.
Подписано к печати: 24.05.2013 г.